**1 Коректність Коші для лінійних ДР порядку n**  
Нехай коефіцієнти лінійного рівняння pi(x) та його права частина неперервні на [a,b]. Тоді ∀[α,β] ⊂[a,b] розв’язок задачі Коші для лін рівняння n-го порядку існує та єдиний.y(n) = -p1\*y(n-1)-…-pn-1\*y’-pny+f(x) (3)  
-p1\*y(n-1)-…-pn-1\*y’ pny+f(x)=Ф(x1,y1,..,,y(n-1)) *Доведення:* Похідна Ф по всіх аргументах, починаючи з 2-го ∂Ф/∂yi=-pn-i(x) Оскільки рі неперервні на [α,β], то вони обмежені на ньому. Тоді Ф задовольняє умові Ліпшиця по всіх своїх аргументах починаючи з 2-го. Крім того ф-я Ф – неперервна на (a,b). Тоді за сформ. раніше теоремою про коректність задачі Коші для ∀ р-ня n-го порядку задача Коші для р-ня (3), а отже і для нашого лін. р-ня буде коректною.  
**2 Про визначник лінійно-зал. системи**  
Якщо система ф-цій у1,…,уn лін. залежна на [a,b], то визначник Вронського цієї системи тотожно = 0 на цьому відрізку. *Доведення*: α1y1+ α2y2+…+ αnyn=0 α1y’1+ α2y’2+…+ αny’n=0 ……………… α1y1(n-1)+ α2y2(n-1)+…+ αnyn(n-1)=0 Однорідна система буде мати нетривіальний розв’язок лише тоді, коли визначник цієї системи = 0 ∆=W(x)=0 *Зауваження* Доведена умова є лише необхідною, проте, не являється достатньою для того, щоб функції були лінійно-незалежними на відповідному проміжку.  
**3 Про визначник лін.-незал. системи**  
Нехай ф-ції у1,у2,…,уn – це лін-незалені розв’язки однорідного лін. диференційного р-ня n-го порядку на проміжку a<x<b, тоді W(x) не перетворюється в 0 в жодній точці проміжку (a,b)  
*Доведення (від супротивного):* Припустимо ∃x0є(a,b), W(x0)=0 с1у1(х0)+ с2у2(х0)+…+ сnуn(х0)=0  
с1у1(х’0)+ с2у’2(х0)+…+ сnу’n(х0)=0 ….. с1у1(n-1)(х’0)+ с2у2(n-1) (х0)+…+ сnуn(n-1) (х0)=0 Коеф. с невідомі. Оскільки за припущенням теореми визначник цієї системи = 0, то задана однорідна система гарантовано має деякий нетривіальний розв’язок č1… čn. Тоді функція ŷ(х)= č1y1+… +čnyn ,буде розв’язком однорідного лінійного р-ня n-го порядку. L(ŷ)=0 при нульових початкових умовах ŷ(х0)= ŷ’(х0)=…= ŷ(n-1)(х0)=0  
Початковы умови єдиним чином визначають розв’язок рівняння,а нульовим поч. умовам має відповідати нульовий розв’язок ŷ=0 č1y1+… +čnyn≡0 у1,у2,…,уn є лінійно залежними.  
Це протирічить умові теореми, отже наше припущення невірне.  
  
**4 Про існування фунд. сис. розв.**  
Для будь-якого лін. однор. р-ня існує фунд. система розв’язків *Доведення* Довільним чином визн. n2 чисел. уік(х0), k=0..n-1, i=1..n Визначник: y10(х0)… yn0(х0), y11(х0)… yn1(х0)….… y1n-1(х0)… ynn-1(х0) На основі цього визначника визнач. розв’язки р-ня у1,…,уn, розглянувши кожен стовпчик визначника, як вектор поч. умов.В силу теореми про визначник Вронського системи розв’язків лін. р-ня збудована сист. розв. є лін-незал. Дана система за визначенням є фунд. сист. розв’язків  
**5 Про заг розв однор рів**  
Нехай у1,у2,…,уn – це фунд. система розв’язків лін. однор. р-ня n-го порядку L[y]=0. Тоді загал. розв. цього однор. р-ня yз.о.= с1у1+ с2у2+…+ сnуn (8) предст. собою лін. комбін. елементів фунд. системи.  
*Доведення* За визн. розв’язок, який містить n вільних сталих назив. заг, якщо з нього можна отримати при деяких конкретних значеннях цих сталих будь-який частинний розв’язок. В силу теореми існування та єдиності довіл. частинн. розв’язок однозначно визн. поч. умовами. y(x0)=у0 … уn-1(x0)=y0n-1 x0є(а,b) Отже (8) – заг. розв. однор. р-ня якщо можна підібрати знач. конст. с1,…,сn таким чином, щоб викон. відповідні поч. умови. Для цього потрібно розв. с1у1(х0)+ с2у2(х0)+…+ сnуn(х0)= у0 …….. с1у1(n-1)(х’0)+ с2у2(n-1) (х0)+…+ сnуn(n-1) (х0)= уn-10 Отрим. неоднор. сист. лін. р-ня Визначник = W(y1..yn)|x=x0≠0 Можемо сказати що ∃! розв. с01…с0n Розв’язок (8) в який підставлені отрим. знач. сталих буде задов. поч. умов.  
 **6 Про загальний розв\*язок неоднорідного рівняння**Заг розв\*язок неодн лінійного рівн представляє собою суму заг розв\*язку однорід рівн і части розв\*язку неоднорідного рівняння *Доведення* Для доведення використовуємо метод Лагранжа. Нехай відома ФСР ,…,. Загальний розв\*язок неоднорідних розв\*язків шукаємо у вигляді лінійної комбінації елементів ФСР, де коефіцієнти ,…, – функції від х, тобто Для того щоб знайти ці функції потрібно n рівнянь. Одне з цих рівнянь буде представляти собою співвідношення, яке отримується при підстановці узн в початкове рівняння. Інші n-1 рівнянь можна задати довільно. Для спрощення викладок збудуємо ці рівняння таким чином щоб похідні загального розв\*язку мали б якомого простіший вигляд.

Накладемо умову щоб , . Підставимо всі похідні в початкове рівняння: = f(x) , , бо – розв\*язки Однорідного Рівняння. Маємо останню умову для : Таким чином, ми маємо наступну систему відносно : C1y!+…+CnYn=0….C1Y1(n-+…+CnYn(n-2)=0, C1Y1(n-1)+…+CnYn(n-1)=f(x)

Визначник записаної системи – це визначник Вронського ФСР, тобто W0 і система має єдиний нетривіальний розв\*язок.= Підставляючи отримані вирази в представлення для розв`язку отримуємо: За побудовою останній вираз є розв\*язком початкового рівняння Сума перших n елементів за відповідною теоремою є загальним розв\*язком однорідного рівняння, а сума останніх n елементів буде частинним розв\*язком неоднорідного рівняння в чому можна переконатись безпосередньою підстановкою.  
 **7 Теорема про загальний розвязок краєвої задачі:**Якщо однорідна крайова задача буде мати тільки тривіальний розв’язок то розвязок неоднорідної крайової задачі буде існувати.Причому розвязок *Для доведення нам* достатньо безпосередньо перевыркою переконатись, що ф-ція у(х) буде задовольняти всім умовам для розвязку.Перепишемо ф-цію в наступному вигляді:-Ці ф-ції неперервні разом зі своїми похідними до ІІ порядку включаючи.Умова неперервності ф-ції Гріна та стрибка І похідної через ці ф-ції можна записати наступним чином: Функція у(х) задовольняє рівняння  
**8 Про кількість власних значень задачі Штурма – Ліувілля**Існує зчисленна множина власних значень ln та нескінченна послідовність відповідних їм власних функцій, причому всі власні значення можна занумерувати у порядку їх абсолютної величини   
 **9 Про кількість власних функцій задачі Штурма – Ліувілля**Кожному сталому значенню з точністю до сталого множника відповідає тільки одна власна функція *Доведення* Припустимо що деякому власному значенню ƛ відповідають 2 ЛНЗ функції (x) та (x). Більше ніж дві їх бути не може, оскільки працюємо з рівнянням 2 порядку. З граничних умов: W( ) ВИНИКАЄ ПРОТИРІЧЧЯ, бо (x) та (x) – Лінійно НеЗалежні. Отже припущення невірне *Зауваження 1* Якщо кожному власному значенню відповідає єдина власна функція, то кажуть, що ранг власного значення = 1. *Зауваження 2* У випадку більш складних граничних умов ранг власного значення може дорівнювати 2  
**10 Теорема про дійсність власних значень**Власні значення краєвої задачі дійсні.*Доведення:*Припустимо, що твердження теореми невірне і в нас існує деяке комплексне.– власне число – власна функціяОскільки в постановці краєвої задачі всі функції та коефіціенти були дійсними, то власним значенням також буде і спряжне число – спряжене власне число**.**  – власна функціяСкористуємось результатом, який ми отримали в теоремі Про ортогональність власних функцій: , де , а отже v=0.  
**11 Теорема Стеклова про розвинення**Нехай f(x) має неперервнц 2-гу похідну на відрізку [0;рі] та задовільняє граничним умовам, тоді на проміжку [0;рі] ця функція може бути представлена абсолютним та рівномірнозбіжним рядом Фур’є за власними функціями задачі Штурма-Ліовіля , де *Доведення:* Визначимо функцію h(x)≡f’’(x)-q(x)\*f(x) Тоді = (Підставимо замість функції Гріна отримане її призначення)= = … =(враховуючи умови яким задовільняє функція f та ортонормованысть власних функцый задачі Штурма-Ліовіля)=.  
 **12 Теорема Стеклова про повноту**Кожна функція f(x) квадрат якої інтегрований на [0;pi] f(x)є може бути розкладена в ряд Фур'є по власних функціях задачі Штурма-Ліовіля. Іншими словами для такої f має місце рівність Парсеваля:, де *Доведення:*Розглянемо 2 випадки:Якщо f належить до простору неперервних функцій тоді для f має місце теорема fє Простір двічі неперервнодиференційованих функцій є щільним в просторі , тобто для кожного елемента fє можна сказати послідовність функцій , яка збігається до f середньоквадратично. Для цих елементів виконується рівність Пасеваля, тоді На основі нерівності Кощі-Буняковського запишемо, що тому оскільки в середньоквадратичному, то . Зафіксуємо деяким довільним чином натуральне число N. Тоді з записаної рівності Парсеваля зробимо висновок . Робимо граничний перехід при :.Ще робимо граничний перехід при :.З цієї нерівності і нерівності Міньовського випливає, що збігається до при .Запишемо рівність Парсеваля для .Виконаємо граничний перехід при   
 **13 Теорема про оператор із різними власними значеннями**Нехай всі власні значення оператора Т дійсні та різні: R Тоді цей оператор діагоналізований, тобто існує деякий базис в якому матриця оператора діагональна.*Довадення:* Розглянемо власні вектори які відповідають власним значенням Ці власні вектори лінійно незалежні, бо якщо вони лінійно залежні то тоді деякий вектор можна лінійно виразити через попередні:. Подіємо на цей вектор зміщним оператором: , оскільки , тому отримуємо що , але тоді , що неможливо. Отже система власних векторів лінійно незалежна, а тому можна взяти її в якості базису лінійного простору.Матриця нашого оператора в базисі із власних векторів очевидно буде діагональною   
**14 Про розв'язок з. Коші для оператора із різними власними значеннями**  
Нехай оператор Т має n-різних дійсних власних чисел, тоді задача КОщі для системи буде мати єдиний розв’язок. *Доведення:* Скористаємось перетворенням координат: , перейшовши тим самим до базису із власних векторів. Перепишемо в цьому базисі задачу Кощі , … У цьому випадку ми можемо легко знайти розв’язок кожної задачі Кощі: Існування та єдиність цього розв’язку випливає з коректності задачі Кощі для рівнянь 1-го порядку.Повертаємось до розв’язку початкової системи   
 **15 Про комплексифікацію оператора**Нехай на комплексифікації простору Е заданий деякий оператор Q, цей оператор Q буде комплексифікацією деякого дійсного оператора Т, який визначений на дійсному просторі Е, т. і т.т., коли він комутує з оператором комплексного спряження ʛ:Q=Tc<=>ʛQ=Qʛ*Доведення*: А) необхідністьМайже очевидним чином випливає з визначення комплексифікації оператора.Б) достатністьНехай Q комутує з ʛ : ʛQ=Qʛ, тоді для будь-якого х є Е можемо записати, що: (ʛQ)х=(Qʛ)х= =Q(ʛх)=Qx.Таким чином ми маємо, що в нас простір Е інваріантний відносно оператора Q, тоді буде існувати звуження оператора Q на відповідний простір Е (Q|E≡T). Згідно визначення, оператор Q буде комплексифікацією оператора Т. **16 Про комплексно спряжені власні значення**Нехай опер Т визначено на деякому дійсному просторі Т: Е→Е. Тоді якщо в цього оператора є комплексно визначене значення µ, то в нього також є власне значення .*Доведення*: розглянемо комплексифікацію Тс . Неважко зрозуміти, що характеристичні многочлени операторів Т і Тс співпадають, тому, якщо власне значення µ у опер Т відповідає влас вектору Φ, то цей вектор буде також власним і для комп-ції Тс .Тс Φ= µ ΦРозглянемо дію композзиції оператора на Φ: (ʛ Тс) Φ =ʛ(Тс Φ)= ʛ(µ Φ)= .Тс(ʛ Φ)= Тс.Вектор є власним вектором комп-ціїіз власним значенням . є власним для Тс, а оск характр. многочлени співпадають, то воно буде власним і для оператора Т.  
 **17 Про пряму суму оператора**Нехай оператор Т, визначений в дійсному просторі Т: Е→Е. Має r дійсних різних власних значень λ1… λr та 2S різних комплексно спряжених власних значень µ11 … µss. Тоді і оператор Т і простір Е можуть бути розкладені в пряму суму Е=Еа  \oplus \!  Еb , Т=Та  \oplus \!  Ти , де оператор Тамає тільки дійсні, а оператор Тb тільки комплексні. *Доведення*: перейдемо до комплексифікацій Тс і Ес. Нехай е1 … еr власні вектори оператора Тсякі відповідають дійсним значенням f11 … fss власні вектори для власних комплексних значень. В сукупності ці вектори утворюють базис простору Ес. Визначимо лінійну оболонку векторів е: Fa≡ Ʌ(e1…er) Fb≡Ʌ(f11 … fss). Тоді простір Ес можна представити у вигляді прямої суми підпросторів: Ес=Fa \oplus \! Fb. Застосуємо декомплексифікацію і позначивши Еа≡(Fa)r , Еb≡(Fb)r , ми отримаємо, що простір Е= Еа  \oplus \!  Еb кожен з цих дійсних підпросторів Еа та Еб є інваріантними відносно оператору Т тоді буде існувати звуження оператора на відповідний підпростір, які ми позначили Та і Тб відповідно і за визначенням ми отримаємо Т=Та  \oplus \!  Тб.  
**18 Про пряму суму опер з комп влас знач.**Нехай оператор Т, який діє в дійсному просторі Е має лише комплексні спряжені власні значення, тоді оператор Т розкладається в пряму суму операторів Т= \oplus \! sі=1 Ті , кожен з яких має лиш 2 комплексно спряжених власних значень, а простір Е розкладається в пряму суму 2-вимірних підпросторів Еі. Dim Ei=2.*Доведення:* розглянемо підпростір Еі, який збудовано на власних векторах Fі≡Ʌ(fі,і), тоді комплексифікацію простору Е можна розкластив пряму суму Е= \oplus \! sі=1 Fі, здійснимо декомплексифікацію Е= \oplus \! sі=1 (Fі)r , Еі=(Fi)r, dim Ei=dimFi=2. **19 Про матрицю опер з комп влас знач в 2-вим просторі**Нехай оператор Т:R2→R2 має комплексно спряжені власні значення µ=а+-ib, b>0, тоді в цьому просторі знайдеться базис, в якому матриця оператора Т матиме вигляд (a,-b;b,a).*Доведення:*Нехай Φ власні вектори, які відповідають власним значенням µ. Φ=u+iv, =u-iv, де u I v деякі дійсні вектори, вони є лінійно незалежні бо фі лінійно незалежні. U=1/2(Φ+), V=1/2i(Φ-), тобто вони можуть бути обраними в якосты простору R2. Подіємо Тс на базисний вектор Φ: ТсΦ= =µ Φ=(а+іб)(U+iV)=(aU-bV)+i(bU+aV). Tc(U+iV)=TcU+iTcV=Tu+iTv.Tu=aU-bV. Tv=bU+aV.  
**20 Про еквівалентність норм**  
В пр-рі всі норми еквіалентні. Іншими словами має місце   
*Доведення* Покажемо, що будь-яка норма екв. до евклідової Встановимо тепер доведення норми N(x). Припустимо, що в визначений базис , а тоді дов елем цього простору ми можемо розрахувати за базисом Якщо у нас є деяка послідовність , то послідовність норм Збіжність послідовності норм каже, що відображення неперервне. В пр-рі розглянемо компакт . Як відомо неперервне відображення на компакті досягає свого мінімального та максимального значення: , але тепер ми можемо від компакту перейти до всього пр-ру: . В силу властивостей норми , За транзитивністю справедлива еквівалентність іншим трьом нормам.   
 **21 Про влестивості експоненти оператора**Нехай у нас є 4 оператори P,Q,S,T: , тоді Якщо подібні оператори Q i T, то будуть подібними і експоненти цих операторів Якщо оператри S i T коммутують ST=TS, тоді *Доведення* Розглянемо добуток: Випливає з 2, якщо T=-S Виконуємо комплексифікацію Цим власним числам відповідають комлексні спряжені вектори . В цьому базисі матриця експоненти має вигляд   
. Діємо на власний вектор : . (1)=(2) Збудуємо матрицю е-оператора у базисі   
**22 Про декомпозицію 1**  
Нехай оператор Т – лін опер, який діє в дійсному(при дісних власних значеннях), або комлексному лін пр-рі Е. Тоді пр-р Е можна подати у вигляді прямої суми узагальнених кореневих підпросторів, розмірність кожного з яких = кратності відповідного вл значення. *Доведення* Розглянемо деякий оператор . Введемо . (5) Можна побачити що відповідають: (6) (7) Позначимо підпростори: (8) В силу того, що пр-р E скінченно вимірний,  
вирази (6) та (7) ми можемо обірвати на деякому кроці, тобто: (9) (10) Зручно подати: Якщо ми будемо шукати Підпростір M ізольований відносно М. Більше того З цих двох фактів слфдує, що для Т існує обернений оператор, тобто Т є оборотним оператором. Якщо Т оборотний оператор, його довільний степінь теж оборотний ; ;  
Покажемо: можна єдиним чином розкласти ; Розглянемо . Якщо образ цього елемента то в цьому підпросторі: Припустимо, що – різні власні значення оператора Т. Визначимо підпростори: В силу розкладення в пряму суму, представлену вище: (11) (лише для ) Покажемо, що Е можна подати у вигляді суми інших підпросторів:. Потрібно показати, що: . Іншими словами необхідно показати, що звуження оператора Т на пр-р має власні значення , а підпростір N, який ми збудуємо для звуження : .  
Для цього покажемо: . Припустимо, що існує: .  
Тоді: , тобто ядро звуження оператора є , а це дозволює стверджувати, що всі підпростори будуть інваріантними відносно оператора і ми можемо сказати, що . Кожен такий підпростір , а це означає, що звуження . А з цього випливає, що власні значення звуження оператора на будуть , отже   
 **23 Про декомпозицію 2**  
Нехай оператор Т діє в просторі Е,який є дійсним якщо всі знач.Т – дійсні, та комплексні в іншому випадку. Тоді Т можна представити:T=N+S, NS=SN;N-нільпотентна, S – діагоналізована, причому це представлення єдине. *Доведення:*  Розглянемо випадок, коли оператор Т має лише єдине власне значення λ кратності n. Тоді простір Е=E(T, λ) => T = + , T = N+S, S – діагоналізований, N – нільпотентний, тобто починаючи з деякого свого степеня, він перетворюється в нульовий. N,S комутують. NS=SN. Тоді eTt=e(N+S)t=eNt+St=eSteNt=eλtI+=eλt=

Інша ситуація: Т має набір власних значень λ1.. λq з кратністю n1..nq. За теоремою 1 про декомпозицію:E=E(T, λ1)+…+E(T, λq). Визначимо Tk як: TkT|e(T, λk) =>T=T1+..+Tq. Кожне Tk=Nk+Sk, Nk=N1+..Nq - нільпотентний, Sk=S1+..Sq - діоганалізований. NS=SN eTt=e(N+S)t=eNt+St=  
=eSteNt=PeSotP-1=>Довели теорему.  
**24 Про декомпозицію 3**  
Для ∀ Т, який діє в R просторі, ∃N та S, NS=SN, N-нільпотентна, S – напівпростий, такі що T=N+S однозначно.*Доведення:*  Перейдемо до комплексифікації оператора Т - Тс=No+So. Покажемо, що   
No (Nc)та So(Sc) – комплексифікації дійсних операторівN та S, тобто ці оператори комутують з оператором комплексного спряження . Покладемо S1=o-1 N1=o-1 Оскільки Tc гарантовано комутує з , о можна записати: Tc=Tc . Tc=c-1 = co)-1 =o-1+o-1= N1(No)+ S1(So). Тоді o-1=So  So=So ., o-1=No  No=No . Тоді So та No – комплексифікація деяких дійсних операторів S та N. Оскільки операція комплексифікації однозначна, то мі можемо отримати однозначне представлення оператора Т = N+S завдяки застосуванню операції декомплексифікації.  
 **25 Лемма1 (нильпотентный оператор)**  
Пусть относительно N. Тогда система векторов . Будет базисом циклического подпространства . *Доведення*: По определению циклическое подпространство построено на этих векторах, по этому эта система является полной. Допустим, что эти вектора является линейнозависимыми, т.е. у нас найдется нетревиальная лин. комб. : ;   
Пусть – это первый ненулевой коэффициент в этой лин. комб. Подействуем оператором на лин. комб.: получили противоречие.  
**26 Лемма 2 (нільпотентний оператор)**  
Пусть . Якщо (операторний многочлен) , то тоді є дільником многочлену : .  
 **27 Лемма 3 (нільпотентний оператор)**  
Нехай Тоді простір можна представити в вигляді прямої суми циклічних підпросторів: . *Доведення*: (Базується на індукції по розмірн. ) База інд:;d;, оскільки нільпотентний оператор має ненульові вектори , що Визначимо вектори таким чином що вони будуть прообразами векторів ; Покажемо що лін. незалежні. (Для справки блть: Підпростори називають лін. незал. якщо б-яка сума векторів , обраних по одному з цих підпросторів є лін. незалежною.)  
Доведемо від супротивного. Припустимо, що цикл. підпростори лін. залежні. Тоді ми можемо обрати в кожному підпросторі деякий ненульовий вектор так що їх сума буде нульовою: ; Але тоді подіявши на цей вираз нільпотентним оператором , ми отримали, що Але незалежні за припущенням. Тому Кожен вектор ми можемо розкласти за базисом відповідного циклічного простору:; Відповідно операторний многочлен може бути поділений на вираз . Оскільки , то ми можемо поділити Тому може бути тільки нульовим. Отримали протиріччяю Отже лін. незал. Отже лін. незалежні. Визначений таким чином підпростір Z буде лін незалежним із кожним циклічним підпростором Кожен циклічний підпростір в Z є одновимірним. ;Тому якщо .  
 **28 Про побудову канонічної нільпотентної форми**Нехай . Якщо кількість елементарних нільпотентних блоків,то вони будуть пов′ язані співвідношеннями , ;  
**29 Про дійсну канонічну форму**  
Нехай оператор має васні значення лямбда1, ... , Тоді в цьому просторі існує базис в якому матриця А має діаг. вигляд: така матриця називається дійсною канонічною формою.  
**30 Про побудову дійсн. канон ф-ми**  
Нехай заданий оп-р Т із відп. набором вл-сних зн-нь. Введ. позн. δk(λ) =  
νк (λ) =  
Тоді ДКФ оп-ра Т буде визн-тись числами νк (λ)=-δк-1(λ)+ 2δк(λ)-δк+1(λ) ,1≤k≤mk δ0(λ)=0 δmλ+1 (λ)=δmλ(λ) *Доведення* Для оператора Т викор. ⇒[ Т.про НКФ ]  
**31 Про стік системи**Нехай оп-р А: E->E. Тоді три наступні тв. є екв-ними 1)поч. сис-ми коор-т є стоком лін. сис-ми 2)для дов-ної норми,яка визн в про-рі Е сущ. к,b>0 ,що в ∀x ∊Е ∀t>0 (||(e^At)x||‖≤ke^(-bt) ||x||3) сущ.|| ||b в якій для деякого b>0 ∀x ∊Е ∀t>0 буде викон. ‖||e^(At)x||B≤  
 e^(-bt)||x||B*Доведення* Екв-сть 2 та 3 випливає з Т. про екв-ність норм . З тв. 2 буде випливати 1 в силу наст. факт:if р-к лін. сис-ми наст. факту : if р-к лін. сис-ми прямує до 0 , то всі вл. зн-ня λ оп-ра мають від’ємну дійсну частину. 1 в 3 для цього ми в рамках Т.покажемо спр-вість дод-вого тв-ня: if для опр-ра А Re(λ) ∊ (α,β) ∀j тоді в просторі Е буде існувати б-с в якому має місце наст. Нер-ність α ||x ||B^2≤(Ax,x) ≤ B ||x| B^2 ||x||b≤||x(0)||B e^Bt||e^(At )x(0)||B≤ e^(Bt)||x(0)||‖Оскільки поч. коор-т є стоком , то Reλ<-b<0, b>0 тому поклавши в ост.нер-ності B=-b,ми приходимо до 3 тв з Т.  
 **32 Про джерело лінійної системи**Нехай є деякий оп-р А**.** Тоді три наст. тв. є екв-ними: 1)поч. сис-ми коор-т є джерелом лін. сис-ми2)∀ || ||B в пр-рі Е сущ.такі k,l>0 , що ||e^(At)x||‖≥ke^(lt)||x|| 3) Сущ.|| ||B в якій для деякого l>0 ∀x∊ Е ∀t>0 буде викон ||e^(At)x||B≥e^(lt)||x||BДоведення пров. аналогічно   
**33 Про гіперболічний потік**Нехай оп-р А,що діє в пр.-рі Е ,визн-є гіперб. потік e^At Тоді пр.-р Е можна розкласти в пряму суму двох,інваріантних відносно оп-ра А , підпр-рів Es Eu. E=Es⊕Eu таких що А/Es буде визн-ти стиснення А/Eu буде визн-ти розширення. *Доведення* Нехай оператор А має набір власних значень λ1, λ2,.. ,λ r ,..,λr+1,.., λn причому перші r власних зн-нь мають від’ємну дійсну частину ,всі інші – з дод-нього . Нехай вектори e1, e2,.. er ,..er+1,.. en відп. цим власним числам в-рів. Тоді в цьому б-сі наш опер. А може буде представлений ДКФ ,причому 1 група блоків відп-дає λ1, λ2,.., λ r 2 група - λr+1,.., λn Тоді матриця оп-ра А має наст. ви-д:В силу інвар-ності, оп-р представляє собою звуження оп-ра А на підр-р Es**.** As= А/Es визн в-рами e1, e2,..,er**.** Au= А/Eu er+1 ,…,en**.** Потік,який визн-ся оп-ром: As буде стиснення**.** Au буде розширення  
**34 Про типову властивість**Мн-на S,оп-рів з разними власними зн-нями є відкритою та скрізь щільною на мн-ні всіх оп-рів,що діють в пр.-рі Е *Доведення* Покажемо ,що мн-на S , в нас буде скрізь щільною .Візьмемо дов. оп-р Т:Е->E**.** Знайдемо б-с,в якому цей оп-р представляється у вигляді Т=S+N причому м-ця S-діогональна. ||Т||‖≡maxi,j⃒ti.j ⃒ Вл-ні зн-ня оп-ра Т визначемо к.ч. λ1, λ2,.., λ r ,а1β∓іb1, аsβ∓іbs,Зафікс дов. чином дод. Зн-ня ε і підберемо числа λ1’, λ2’,.., λ r ‘а1, аs,…,bs,1) λi’= λj’ i не = jai не =aj2)⃒λi’- λi⃒<ε ⃒ai’- ai⃒<εСформуємо тепер новий оп-р Т’ н.ч. Т’=S’+N Для дов. оп-ра Т знайшли оп-р Т’ з різними власними зн-нями , що дов . скрізь щільність мн-ни S1Ak A∀ Ak має деяке вл.зн-ння λk кратність якого ,що найм.,2{ λk } λ c хвилей Ak xk= λk xk.Ak yk= λkyk Ми можемо вваж що в-ри xk и yk ортогональні а ‖ xk ‖=1 ‖ yk ‖=1{ xk } x c хвилей   
{ yk } y c хвилей λ c хвилей власне значення опр А з крат 2 супереч умові того,що А ∊S1